FAST ENSAE

COURS DE MATHEMATIQUES
PREMIERE ANNEE

# ALGEBRE I
## series exercises

*Submitted By:*
Nonvikan Karl-Augustt
Alahassa.
Intern
karl.augustt.corporate-at-gmail.com

*Submitted To:*
Professor Mamadou BARRY
mamadou.barry-at-ucad.edu.sn

June-December, 2015
Lab Practicals Record

UNIVERSITE
CHEIKH ANTA DIOP
DE DAKAR

# Chapter 1

# Logique et ensemble

## 1.1 Exercice I

Soient R, S et T trois propositions. Démontrer les relations suivantes:

$$R \Longrightarrow (S \Longrightarrow R); (R \Longrightarrow S) \Longrightarrow [(S \Longrightarrow T) \Longrightarrow (R \Longrightarrow T)]$$

$$(R \Longrightarrow S) \Longrightarrow (S \longrightarrow T) \longrightarrow (R \Longrightarrow T)$$

$$(R \Longrightarrow S) \Longrightarrow [(RvT) \Longrightarrow (SVT)]$$

$$(R \Longrightarrow S) \Longrightarrow [(R \wedge T) \Longrightarrow (S \wedge T)]$$

$$(R \Longrightarrow S) \Longrightarrow [(R \Longrightarrow T) \Longrightarrow [R \Longrightarrow (S \wedge T)]]$$

## 1.2 Exercice II

1. Soient P, Q, R des propositions. Dresser les tables de vérité des propositions suivantes:

   (a)
   $$[(P \Longrightarrow R)V(Q \Longrightarrow R)] \Longrightarrow [(PvQ) \Longrightarrow R]$$

   (b)
   $$(P \wedge \rceil Q) \Longrightarrow (A \Longrightarrow \rceil P)$$

   (c)
   $$[(Q \Longrightarrow R)V(P \Longrightarrow R)] \wedge (\rceil PVR)$$

2. Pour tous réels $x$et$y$, on note $P(x, y)$, l'assertion "$x + y^2 = 0$". Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses.

(a) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, P(x,y)$
(b) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, P(x,y)$
(c) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in P(x,y)$
(d) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists \in \mathbb{R}, P(x,y)$
(e) $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, P(x,y)$

## 1.3 Exercice III

1. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur $I$ à valeurs réelles. Exprimer à l'aide des quantificateurs les assertions suivantes:
   (a) La fonction $f$ s'annule
   (b) $f$ n'est pas une fonction constante
   (c) la fonction $f$ est nulle
   (d) la fonction $f$ présente un minimum
   (e) $f$ n'est pas injective
2. Donner la négation des propositions suivantes:
   (a) $(\exists x \in \mathbb{N})(\exists y \in \mathbb{N}*)(\forall x \in \mathbb{N})(x = yz)$
   (b) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle

$$(\forall \epsilon \mathbb{R}_+^*)(\exists \eta \in \mathbb{N})[\forall (p,q) \in \mathbb{N}*)(p \geq q > \eta \Longrightarrow |u_p - u_q| < \epsilon]$$

   (c) Soit $f$ la fonction définie de $\mathbb{R}$ dans

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta \in \mathbb{R}_+^*)(\forall x \in \mathbb{R})(|x| < \delta \Longrightarrow |f(x)| < \epsilon)$$

   (d) $(\forall x \in \mathbb{R})(x \geq 0) \Longrightarrow (\exists y \in \mathbb{R})(y^2 = x)$

## 1.4 Exercice IV

Soient $A, B, C$ trois parties d'un ensemble Z. Simplifier les expressions suivantes:

1. $A \cap (\bar{A} \cup B)\bar{A} \cup (A \cap B)$
2. $(A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B) \cup (\bar{A} \cup \bar{B})$
3. $A \cap (\bar{A} \cup B) \cap (\bar{A} \cup \bar{B} \cup C)$
4. $A \cup (\bar{A} \cap B) \cup (\bar{A} \cap \bar{B} \cap C)$
5. $\overline{A \cap (A \cap B)}$
6. $A \cup (B \cap C) \cup (\bar{B} \cap \bar{C}) \cup C$
7. $B \cup (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B \cap \bar{C}$

## 1.5 Exercice V

1. Soient A, B et C trois parties de E. Démontrer les relations suivantes:
   (a) $A \cap B = A \cup B \Longleftrightarrow A = B$
   (b) $A \cap B = A \cap C \Longleftrightarrow A \cap \bar{B} = A \cap \bar{C}$
   (c) $\begin{cases} A \cup B = A \cup C \\ A \cap B = A \cap C \end{cases} \Longrightarrow B = C$
2. Soient $E_1, E_2,$ et $E_3$ trois ensembles. Montrer que :

$$(E_1 \cup E_2) \cap (E_2 \cup E_3) \cup (E_3 \cap E_1) = (E_1 \cap E_3) \cup (E_2 \cap E_3) \cup (E_3 \cap E_1)$$

## 1.6 Exercice VI

Soit $E = \mathbb{R}^2$. Représenter les ensembles suivantes:

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 1\}$$

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 + 2y < 0$$

$$A \cap B; A \cup B; A\ B; B\ A; A \Delta B = (A\ B) \cup (B\ A)$$

où $A - B = A \cap B$

## 1.7 Exercice VII

Examiner les relations logiques existant entre les assertions suivantes :

A: Tous les hommes sont mortels
B: Tous les hommes sont immortels
C: Aucun homme n'est mortel
D: Il existe des hommes immortels
E: Il existe des hommes mortels

## 1.8 Exercice VIII

Soient $P, Q, R$ des propositions.

1. Dresser la table de vérité de la formule:

$$[(P \Longrightarrow R) V (Q \Longrightarrow R)] \Longrightarrow [(PVR) \Longrightarrow R]$$

2. Montrer que cette formule est équivalente à $(P \Longleftrightarrow Q) V R$

## 1.9 Exercice IX

Soient $P, Q, R$ et $S$ quatre propositions :

1. Montrer que les formules : $(PVq) \wedge (RVS)$ et
   $(P \wedge R)V(P \wedge S)V(Q \wedge R)V(Q \wedge S)$ sont équivalentes.
2. Montrer que les formules : $(P \wedge Q)V(R \wedge S)$ et $(PVR) \wedge (PVS) \wedge (QVR) \wedge (QVS)$ sont équivalentes.
3. Soient x et y deux réels, résoudre le système suivant:

$$\begin{cases} (x-1)(y-2) = 0 \\ (x-4)(y+7) = 0 \end{cases}$$

## 1.10 Exercice X

Donner la relation des propositions suivantes:

1. $(\forall x \in \mathbb{N})(\exists y \in \mathbb{N}^*)(\forall z \in \mathbb{N})(x = yz)$
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle et $l \in \mathbb{R}$.

$$(\forall \epsilon \in \mathbb{R}^*)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n > N) \Longrightarrow |u_n - l| < \epsilon)$$

3. Soit $f$ une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$.

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \rho > 0)(\forall x \in \mathbb{R})(|x - x_0| < \rho \Longrightarrow |f(x)| < \epsilon$$

4. $(\forall x \in \mathbb{R})(x \leq 0) \Longrightarrow (\exists y \in \mathbb{R}_+)(x^2 = y)$.

## 1.11 Exercice XI

Représenter les parties : $A, B, \bar{A}, \bar{B}, A \cap B, A \cup B, A \ B = A \cap \bar{B}, B \ A = B \cap \bar{A}, A \lhd B = (A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{A})$

1. $E = \mathbb{R}^2; A = \{x \in \mathbb{R}/x^2 + x - 6 < 0\}; B = \mathbb{Z}$.
2. $E = \mathbb{R}^2; A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2/x^2+y^2 < 1\}; B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2/x^2+y^2+2y \leq 0\}$

# Chapter 2

# Application et relation binaires

## 2.1 Exercice I

Les applications suivantes sont-elles injectives, surjectives ou bijectives?

$$\begin{array}{rccc} f_1\text{:} & \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x^2+1 \\ f_2\text{:} & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x^2 \\ f_3\text{:} & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \longmapsto & (x-y,x+y) \\ f_4\text{:} & \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x^2 \end{array}$$

## 2.2 Exercice II

Soit l'application :

$$\begin{array}{rccc} g\text{:} & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x^2+2x-1 \end{array}$$

1. Déterminer $g([-2,4[), g^{-1}(\{-1\}), g^{-1}(\{-3\}) n g(\mathbb{R})$.
2. Déduire l'injectivité et la surjectivité de $g$.

## 2.3 Exercice III

1. Soient $a, b$ et $c$ trois réels tels que $c \neq 0$ et $a^2 + bc \neq 0$. On considère l'application:

$$h : \mathbb{R}\ \{\frac{c}{a}\} \longrightarrow \mathbb{R}\ \{\frac{a}{c}\}, h(x) = \frac{ax+b}{cx-a}$$

(a) Calculer $h \circ h$

(b) En déduire que $h$ est bijective et déterminer $h^{-1}$

2. On considère l'application :

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \longmapsto & (2x, x-y, x+y+z) \end{array}$$

(a) Montrer que $\varphi$ est bijective.

(b) Déduire l'application $\varphi^{-1}$.

## 2.4 Exercice IV

Soient $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ et $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, les applications définies par $\forall x \in \mathbb{N}, f(x) = 2x$ et

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} \text{ si } six \text{ pair} \\ \frac{x-1}{2} \text{ si } x\text{impair} \end{cases}$$

1. Etudier l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité de $f$ et $g$.
2. Déterminer $f \circ g$ et $g \circ f$.

## 2.5 Exercice V

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application.

1. Etablir $\forall A \in \mathcal{P}(E), A \subset f^{-1}[f(A)]$,

$$\forall B \in \mathcal{P}(F), f[f^{-1}(B)] \subset B$$

2. Montrer que $f$ est injective $\iff \forall A \in \mathcal{P}(E), A = f^{-1}[f(A)]$
3. Montrer que $f$ est surjective $\iff \forall B \in \mathcal{P}(F), B = f[f^{-1}(B)]$
4. Montrer que $f$ est injective $\iff \forall A, A' \in \mathcal{P}(E), f(A \cap A') = f(A) \cap f(A')$.

## 2.6 Exercice VI

Soient $E = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$ un ensemble muni de la relation binaire $\mathcal{R}$ définie par $\forall (x,y) \in E$ et $\forall (z,t) \in E$,

$$(x,y)\mathcal{R}(z,t) \iff z^2 y = x^2 t$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $E$.
2. Déterminer la classe d'un élément $(a,b) \in E$. Déduire la classe de $(1,1)$.
3. Si $F = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $\mathcal{R}$ est-elle une relation d'équivalence sur F' ?

## 2.7 Exercice VII

Soit $\mathcal{S}$ une relation binaire définie sur $\mathbb{R}$ par $x\mathcal{S}y \Longleftrightarrow x^2 - y^2 = x - y$.

1. Montrer que $\mathcal{S}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer la classe d'un élément $a \in \mathbb{R}$.
3. En déduire l'ensemble-quotien.

## 2.8 Exercice VIII

Dans $\mathbb{N}*$, on définit la relation par $x \ll y \Longleftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} *$ tel que $y = x^n$.

1. Montrer que $\ll$ est une relation d'ordre partiel sur $\mathbb{N}^*$.
2. On considère la relation $\ll$ dans $\mathbb{N}$ et $A = \{2, 4, 16\}$.
3. Déterminer le plus petit élément et le plus grand élément de $A$.

## 2.9 Exercice IX

Soient $E = \{0, 1\}$ et $F = \{a, b, c\}$. Enumérer les applications de $E$ dans $F$, puis les applications de $F$ dans $E$ .

## 2.10 Exercice X

1. Soit l'application :

$$\begin{array}{rccc} f\colon & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) = x^2 \end{array}$$

   Déterminer $f([-1, 1[); f(]0, 3]); f(\mathbb{R}); f([0, 3]); f^{-1}(\mathbb{R}); f^{-1}([-10, 4[)$.

2. Soit l'application :

$$\begin{array}{rccc} g\colon & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & g(x) = x^2 - 2x + 3 \end{array}$$

   Calculer $g([0, 5[); g(\mathbb{R}_+); g^{-1}(\{3\})$.

## 2.11 Exercice XI

Soient $E$ un ensemble et $A, B$ deux parties de $E$. On appelle fonction caractéristique d'une partie $A$ de $E$, l'application :

$$\begin{array}{rccc} \varphi_A: & E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \varphi_A = \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ si } x \in A \\ 0 \text{ si } x \notin A \end{array} \right. \end{array}$$

Démontrer les relations suivantes:

1. $\varphi_A^2 = \varphi_A$
2. $\varphi_{\bar{A}} = 1 - \varphi_A$
3. $\varphi_{A \cap B} = \varphi_A \cdot \varphi_B$
4. $\varphi_{A \cup B} = \varphi_A + \varphi_B - \varphi_A \varphi_B$
5. Si $A \cup B = \phi$
6. $\varphi_{A \cup B} = \varphi_A + \varphi_B$

## 2.12 Exercicie XII

Soient $f : E \longrightarrow F$ une application, $A$ et $A'$ deux parties de $E$. Démontrer les relations suivantes :

1. Si $A \subset A'$ alors $f(A) \subset f(A')$
2. $f(A \cup A') = f(A) \cup f(A')$
3. $f(A \cap A') \subset f(A) \cap f(A')$

## 2.13 Exercicie XIII

Soient $f : E \longrightarrow F$ une application, $B$ et $B'$ deux parties de $F$. Démontrer les relations suivantes :

1. Si $B \subset B'$ alors $f^{-1}(B) \subset f^{-1}(B')$
2. $f^{-1}(B \cup B') = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B')$
3. $B \cap B' = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B')$
4. $f^{-1}(C_F^E) = C_E(f^{-1}(B))$

## 2.14 Exercice XIV

Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ des applications. Prouver que :

1. $g \circ f$injective $\implies f$ injective
2. $g \circ f$ surjective $\implies g$ surjective
3. $g \circ f$injective et $f$ surjective $\implies g$ injective item $g \circ f$ surjective et $g$ injective $\implies$ $f$ surjective

## 2.15 Exercice XV

Les applications suivantes sont-elles bien définies ? Si oui, sont-elles injectives, surjectives, bijectives ?

$$f_1: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$$

$$f_2: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$$

$$f_3: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$$

$$f_4: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$$

$$f_5: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_- \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$$

$$f_6: \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ n & \longmapsto & n-1 \end{array}$$

$f_7 : \{0, 1, 2\} \longrightarrow \{1, 8, -1, 24\}$ telle que $f(0) = -1; f(1) = 8; f(2) = 24$.

# Chapter 3

# Polynômes

## 3.1 Exercice I

Effectuer les divisions euclidiennes de $3x^5+4x^2+1$ par $x^2+2x+3$ ; $3x^5+2x^4-x^2+1$ par $x^3+x+2$ ; $x^4-x^3+x-2$ par $x^2$–$2x+4$.

## 3.2 Exercice Ii

Effectuer la division de $A = x^6$–$2x^4+x^3+1$ par $B = x^3+x^2+1$.

1. Suivant les puissances décroissantes ;
2. A l'ordre 4 suivant les puissances croissantes.

## 3.3 Exercice III

Trouver les polynômes $P$ tels que $P+1$ soit divisible par $(x-1)^4$ et $P-1 par (x+1)^4$.

## 3.4 Exercice IV

Déterminer le PGCD des polynômes suivants : $x^5+3x^4+2x^3-x^2-3x-2$ et $x^4+2x^3+x+2$ ; $x^4+x^3-3x^2$–$4x-1$ et $x^3+x^2$–$x-1$ ; $x^5+5x^4+9x^3+7x^2+5x+3$ et $x^4+2x^3+x+1$ ; $x^4+x^3-2x+1$ et $x^3+x+1$ ; $x^3-x^2-x-2$ et $x^5-2x^4+x^2$–$x-2$.

## 3.5 Exercice V

Calculer le PGCD $D$ des polynômes $A$ et $B$ définis ci-dessous. Trouver des polynômes $U$ et $V$ tels que $D = AU+BV$

1. $A = x^5 + 3x^4 + 2x^3 - x^2 - 3x–2$ et $B = x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 7x + 6$;
2. $A = x^6 - 2x^5 + 2x^4 - 3x^3 + 3x^2–2x$ et $B = x^4 - 2x^3 + x^2–x + 1$.

## 3.6 Exercice VI

Pour un entire non nul $n$, quel es l'ordre de multiplicité de 2 comme racine du polynôme :

$$nx^{n+2}–(4n+1)x^{n+1} + 4(n+1)x^n - 4x^{n-1}$$

## 3.7 Exercice VII

Trouver un polynôme $P$ de degré $< 3$ tel que $P(1) = -2; P(-2) = 3$ et $P(0) = -1$.

## 3.8 Exercice VIII

Factoriser dans $\mathbb{R}[x]$ : $x^6 + 1; x^3 - 3; x^{12} - 1; x^9 + x^6 + x^3 + 1$

## 3.9 Exercice IX

Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}$ :

$$\frac{x^5 + x^4 + 1}{x^3–x}; \frac{2x^3 + x^2–x + 1}{x^2–2x + 1}; \frac{x^5 + x^4 + 1}{x(x-1)^4}; \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}; \frac{2x^5 - 8x^3 + 8x^2–4x + 1}{x^3(x-1)^2(x^2+1)}; \frac{x^5 + x^4 + 1}{x^3 - 1}; \frac{2x^3 + x^2–x + 1}{x^2–2x + 1}$$

# Chapter 4

# Espaces vectoriels

## 4.1 Exercice I

Indiquer pour les sous-ensembles $F$ suivants ceux qui sont des sous-espaces vectoriels.

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = 0\}, E = \mathbb{R}^3$$

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / y + t = 2\}, E = \mathbb{R}^4$$

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / 3x + 2y + t = 0\}, E = \mathbb{R}^4$$

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / z = xy\}, E = \mathbb{R}^3$$

$$F = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) / f(c) = 0\}, E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), o\grave{u} c \in \mathbb{R}$$

$$F = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R}) / 3u_n - 2u_{n+1} = u_{n+2}\}, E = \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$$

## 4.2 Exercicie II

Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les sous-ensembles suivants :

$$F_1 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x - y = 3z – t\}$$

$$F_2 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x - y + 2t = 0 \text{ et } x – 2z + 3t = 0\}$$

$$F_3 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x + y = z + t = x + z = x + t = y + z\}$$

$$F_4 = \{(x - y, x + y, x, y) / (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$$

1. Montrer que les partes ci-dessus sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$.
2. En déduire une base et la dimension de chacun d'eux

## 4.3 Exercice III

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère :

$$s = \{u, u', u''\} \text{ et } s' = \{v, v', v''\}$$

$$u = (0, 1, 1); u' = (1, 0, 1); u'' = (1, 1, 0)$$

$$v = (2, 3, 2); v' = (1, 1, 0); v^{\text{‘’}} = (1, 2, 1)$$

Montrer que $s$ et $s'$ engendrent $\mathbb{R}^3$.

## 4.4 Exercicie IV

1. Montrer que les familles suivantes sont liées et donner la relation de dépendance linéaire.

$$S = \{(-1, -1, 1), (1, 3, 2), (-1, 1, 4)\}$$

$$S = \{(1, 0, 2), (-1, 2, 3), (4, -2, 3), (-2, 1, 5)\}$$

2. Montrer que les ensembles suivants constituent une base de $\mathbb{R}^3$. $B_1 = \{(-1, 1, 1), (1, -1, 1), (1, 1, -1)\}$ $B_2 = \{(-1, -1, 1), (1, 2, 0), (0, 1, 2)\}$ En déduire les composantes de $V = (3, 5, 6)$ dans les bases ci-dessus.

## 4.5 Exercice V

Soient $F$ et $G$ deux $\mathbb{R}$ sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel $E$.

1. Montrer que $F \cup G$ est un sous-espaces vectoriel de $E \Longleftrightarrow F \subset G$ ou $G \subset F$.

2. Montrer que $F + G = F \cap G \Longleftrightarrow F = G$.

## 4.6 Exercice VI

Dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on considère les parties suivantes :

$$F_1 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) / f \text{ paire } \}$$

$$F_2 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) / f \text{ impaire } \}$$

Montrer que $F_1$ et $F_2$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

## 4.7 Exercice VII

Dans $\mathbb{R}_2[x]$, on considère les parties suivantes :

$$G_1 = \{p(x) \in \mathbb{R}_2[x] / p'(1) = 0\}$$

$$G_2 = \{p(x) \in \mathbb{R}_2[x] / p(0) = p(2) = 0\}$$

1. Montrer que $G_1$ et $G_2$ sont des sous-espaces vectories de $\mathbb{R}_2[x]$.
2. Déterminer une base de $G_1$ et $G_2$.
3. A-t-on $\mathbb{R}_2[x] = G_1 \oplus G_2$ ?

## 4.8 Exercice VIII

1. Déterminer une base de $\mathbb{R}^4$ dont une partie est constituée par :

$$V_1 = (2, -2, 3, 1) \text{ et } V_2 = (-1, 4, -6, -2)$$

2. Si $F = Lin\{V_1, V_2\}$, déterminer $G$ tel que $\mathbb{R}^4 = F \oplus G$.
3. On considère dans $\mathbb{R}^4$,

$$F' = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x = y\text{–}3z \text{ et } z = 2t\}$$

Compléter une base de $F'$ pour obtenir une base de $\mathbb{R}^4$.

## 4.9 Exercice IX

On considère dans $\mathbb{R}^5$ le sous-espace engendré par $S = \{u_1, u_2\}$ et sous-espace vectoriel $G$ engendré par $S' = \{v_1, v_2\}$ avec ,

$$u_1 = (1, 0, 1, 2, 3), u_2 = (1, -5, -4, 3, 8)$$

$$u_1 = (2, 1, 5, 1, -1), u_2 = (3, -1, 5, 2, 1)$$

1. Déterminer une base de $F$ et $dim(F)$
2. Déterminer une base de $G$ et $dim(G)$
3. Déterminer une base de $F + G$ et $dim(F + G)$
4. En déterminer $dim(F \cap G)$ et une base de $F \cap G$.

## 4.10 Exercice X

1. Montrer que les ensembles suivants sont des sous-epaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ sur $\mathbb{R}$ .

$$F_1 = \{(x-y, 2x, x+2y, -y)/x, y \in \mathbb{R}\}$$
$$F_2 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x\text{–}y = 2z + t\}$$
$$F_3 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x\text{–}y + 3t = 0 \text{ et } x - 2z + t = 0\}$$

2. En déduire une base et la dimension de chacun des sous-espaces vectoriels ci-dessus.

## 4.11 Exercice XI

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère :

$$S_1 = \{v_1, v_2, v_3\} \text{ où } v_1 = (1, 1, -1), v_2 = (2, 1, 3), v_3 = (0, -1, 5)$$
$$S_2 = \{w_1, w_2, w_3\} \text{ où } w_1 = (2, 3, 2), w_2 = (1, 1, 0), w_3 = (1, 2, 1)$$

$S_1$ et $S_2$ engendrent-ils $\mathbb{R}^3$ ?

## 4.12 Exercice XII

1. Montrer que les vecteurs suivants sont linéairement dépendants et trouver la relation de dépendance linéaire :

$$S' = \{(-1, -1, 1); (1, 2, 0); (0, 1, 1)\}$$
$$S'' = \{(3, 1, 1); (2, -1, 3); (4, 3, -1)\}$$
$$S''' = \{(1, 0, 2); (-1, 2, 3); (4, -2, 3); (-2, 1, 5)\}$$

2. Montrer que les ensembles suivants constituent une base de $\mathbb{R}^3$ :

$$B_1 = \{(1, 0, 1); (0, 1, 1); (1, 1, 0)\}$$
$$B_2 = \{(-1, -1, 1); (1, 2, 0); (0, 1, 2)\}$$

   En déduire les composantes de $u = (3, 4, -5)$ dans les bases ci-dessus.

## 4.13 Exercice XIII

1. Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les systèmes suivants :

$$S_1 = \{u_1, u_2\} \text{ avec } u_1 = (1, 2, 3), u_2 = (2, -1, 1)$$
$$S_2 = \{v_1, v_2\} \text{ avec } v_1 = (1, 0, 1), v_2 = (0, 1, 1)$$

   Montrer que $Lin(S_1) = Lin(S_2)$.

2. Soient $B = \{u, v\}$ une base d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E$. Parmi les systèmes suivants, reconnaître les systèmes libres, les systèmes générateurs et bases de $E$. $\{u, u - 2v + w, -v + w\}, \{u - v, v - w, w - u\}, \{u, u - 2v + w\}$

## 4.14 Exercice XIV

Soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ des réels 2 à 2 distincts et $a_1, a_2, \ldots, a_n$ des réels 2 à 2 distincts. Montrer que $S = \{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ et $S' = \{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ sont libres avec :

$$f_i(x) = e^{\alpha_i x} (1 \leq i \leq n)$$

$$g_i(x) = |x - a_i| (1 \leq i \leq n)$$

## 4.15 Exercice XV

1. Considérons le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ et

$$E_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / x_1 - x_2 - x_3 = 0\}$$

$$E_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / x_1 - x_3 = 0 \text{ et } x_1 - x_2 = 0\}$$

   Montrer que $E_1$ et $E_2$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires.

2. Soit $\mathbb{R}_4[x]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes de dégré inférieur ou égal à 4.

$$F_1 = \{p(x) \in \mathbb{R}_4[x] / p(1) = p'(1) = 0\}$$

$$F_2 = \{p(x) \in \mathbb{R}_4[x] / p(0) = p(2) = 0\}$$

   (a) Vérifier que $F_1$ et $F_2$ sont des $\mathbb{R}$-sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}_4[x]$ et donner une base de $F_1$ et une base de $F_2$.

   (b) Compléter ces bases en des bases de $\mathbb{R}_4[x]$.

   (c) Vérifier que $\mathbb{R}_4[x] = F_1 \oplus F_2$.

## 4.16 Exercice XVI

Déterminer le rang des systèmes suivants :

$$S_1 = \{(-2, 1, 0); (1, 2, 3); (2, 2, 3)\}$$

$$S_2 = \{(1, 2, 4); (2, 1, 1); (-2, 1, 0); (3, 4, 1)\}$$

$$S_3 = \{(-1, 1, 1, 2); (3, 0, 1, 1); (-1, -1, 0, 0)\}$$

$$S_4 = \{(1, -1, 0, 1, 2); (-2, 1, 3, 0, 2); (3, 4, 5, 1, 0); (1, 3, -1, 0, 5); (1, 1, 1, 1, 0)\}$$

## 4.17 Exercice XVII

Soient $F$ le sous-espace de $\mathbb{R}^4$ engendré par $v_1 = (1, -1, 0, 2)$, $v_2 = (2, 1, 3, 1)$, $v_3 = (4, 5, 9, -1)$, et $G$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs $w_1 = (1, 1, 1, 1)$ et $w_2 = (3, -4, 4, 2)$.

1. $S_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$ et $S_2 = \{w_1, w_2\}$ peuvent-ils être complétés en des bases de $\mathbb{R}^4$ ?

2. Donner une base de $F$ et une base de $G$.

3. Déterminer une base de $F + G$, et une base de $F \cap G$.

# Chapter 5

# Lois de composition internes

## 5.1 Exercice I

Dans chacun des cas ci-dessous, montrer que $\star$ est une loi de composition interne sur $E$ et étudier ses propriétés :

1. $E = \mathbb{N}$ et $x \star y = x + y + xy$
2. $E = \mathbb{Z}$ et $x \star y = x + 2y$
3. $E = \mathbb{R}^*$ et $x \star y = |x|y$
4. $E = x \star y = \frac{x+y}{1+xy}$ et $E = ]-1, 1[$
5. $E = \mathbb{R}$ et $x \star y = ln(e^x + e^y)$

## 5.2 Exercice II

On définit sur $\mathbb{R}^2$ la loi $\star$ définie par : $x \star y = xy - 2x - 2y + 6$.

1. Vérifier que $\star$ est une loi de composition interne sur $\mathbb{R}\ \{2\}$.
2. Montrer que $(\mathbb{R}\ \{2\}, \star)$ est un groupe abélien.

## 5.3 Exercice III

Soit $G = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ et $\perp$ la loi de composition interne définie sur $G$ par :

$$(x, y) \perp (x', y') = (xx', xy' + y)$$

Montrer que $(G, \perp)$ est un groupe non commutatif.

## 5.4 Exercice IV

Soit $C > 0$ et $I = ]-C, C[$.

1. Montrer que $\forall (x, y) \in I^2, x \star y = \frac{x+y}{1+\frac{xy}{C}} \in I$.
2. Montrer que la loi $\star$ munit $I$ d'une structure de groupe abélien.

## 5.5 Exercice V

Pour chacun des permutations suivantes, determiner sa decomposition canonique en produits de cycles disjoints, son ordre, sa signature, une decomposition en produit de transpositions et le nombre d'inversions.

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 4 & 6 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 6 & 9 & 7 & 2 & 5 & 8 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 3 & 4 & 2 & 1 & 8 & 7 & 9 & 11 & 12 & 10 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

En déduire $\sigma^{45}, \sigma^{1432}, \sigma^{2011}$.

## 5.6 Exercice VI

Dans $S_g$, on considère les permutations suivantes :

$$\pi = (1,2,3)(4,5,6)(7,8,9), \sigma = (4,5,6)(7,8,9)$$
$$\tau = (1,4,7)(2,5,8)(3,6,9)$$

1. Vérifier que $\pi$ commute avec $\sigma$ et $\tau$.
2. Quels sont les ordres de $\pi, \sigma, \tau,$ et $\sigma \circ \tau$ ?
3. Calculer $\tau \circ \sigma \circ \tau^{-1}$ et $\tau^{-1} \circ \sigma \circ \tau$.

En déduire que $\pi$ est une puissance de $\sigma \circ \tau$.

## 5.7 Exercice VII

Soit $n \geq 4 (n \in \mathbb{N}$. Pour $i, j, k, l$ distincts dans $\mathbb{N}^*$.

1. Vérifier les relations suivantes :
$$(i,j)(j,k) = (i,j,k)$$
$$(i,j)(k,l) = (i,j,k)(j,k,l)$$
2. En déduire que le groupe alterné $S_n$ est engendré par :
   (a) L'ensemble des 3-cycles de $S_n$ ;
   (b) L'ensemble des 3-cycles de la forme :
$$(1,i,j)(2 \leq j \leq n)(2 \leq i \leq n)$$

## 5.8 Exercice VIII

Soit $G$ un groupe monogène engendré par l'élément $a$ : $G = (a)$.

1. Soit $S$ un sous-groupe de $G$. On suppose qu'il existe un entier positif minimum m tel que $a^m \in S$. Montrer que si $a^p \in S$, alors $m$ divise $p$.
2. Montrer que tout sous-groupe de $G$ est monogène. On suppose que dans la suite $G$ est un plus fini d'ordre $n$ (cyclique).
   (a) Montrer que $a^p = e$ si et seulement $n$ divise $p$.
   (b) Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $1 \leq k \leq n$. Montrer que $(a^k) = (a^d)$, où $d = (k, n)$. En déduire que l'ordre du groupe $(a^k)$ et $\frac{n}{d}$.
   (c) Montrer que $G = (a^k)$ si et seulement si (k,n) = 1.

## 5.9 Exercice IX

1. On définit sur $\mathbb{R}\ \{2\}$ la loi $\star$ par :

$$x \star y = xy - 2x - 2y + 6$$

   Montrer que $(\mathbb{R}\ \{2\}, \star)$ est un groupe abélien.

2. On munit l'intervalle $]-1, 1[$ de $\mathbb{R}$ de l'opération $\square$ définie par :

$$\forall (x, y) \in (]-1, 1[)^2, x \square y = \frac{x + y}{1 + xy}$$

   Montrer que la loi $\square$ confère à $]-1, 1[$ une structure de groupe.

3. Montrer que $(\mathbb{R}, \star)$ où $\star$ est telle que :

$$a \star b = \sqrt[3]{a^3 + b^3}, \forall (a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

   est un groupe.

## 5.10 Exercice X

Montrer que l'ensemble $G$ des complexes $\{1, -1, 1, -1\}$ est un sous-groupe du groupe multiplicatif $\mathbb{C}^*$ des complexes non nuls et que ce sous-groupe est isomorphe au groupe additif $\mathbb{Z}_4 = \mathbb{Z}4\mathbb{Z}$ des entiers modulo 4.

## 5.11 Exercice XI

Soit $G$ un groupe. Montrer que les sous-ensembles, suivants sont des sous-groupes de $G$.

1. Le normalisateur $N(S)$ d'une partie non vide $S$ de $G$:

$$N(S) = \{x \in G / xS = Sx\}$$

2. Le centre $Z(G)$ de $G : Z(G) = \{a \in G / ax = xa, \forall x \in G\}$;
3. L'ensemble des éléments d'ordre fini, si $G$ est commutatif.
4. L'ensemble $H = aGa^{-1}, a \in G$.

## 5.12 Exercice XII

Soit $\mathcal{S}_3$ le groupe des permutations de l'ensemble $\{1, 2, 3\}$.

1. Quel est l'ordre d'un sous-groupe de $\mathcal{S}_3$;
2. Chercher tous les sous-groupes de $\mathcal{S}_3$;
3. Déterminer les sous-groupes distingués dans $\mathcal{S}_3$.

## 5.13 Exercice XIII

Soit $a$ un élément d'un groupe multiplicatif $G$. On définit l'application :

$$\begin{array}{rccc} f_a: & G & \longrightarrow & G \\ & x & \longmapsto & a \times a^{-1} \end{array}$$

1. Montrer que $f_a$ est un automorphisme de $(G, \cdot)$ (appelé automorphisme intérieur de $G$ défini par l'élément $a \in G$).
2. On note $I = \{f_a, a \in G\}$. Montrer que $(I, \circ)$ est un groupe où $\circ$ est la loi de composition des applications de $G$ dans $G$.
3. Soit :

$$\begin{array}{rccc} h: & G & \longrightarrow & I \\ & a & \longmapsto & f_a \end{array}$$

   Montrer que $h$ est automorphisme de groupes et que $Ker(h)$ est le centre de $G$.

## 5.14 Exercice XIV

Soit $G$ un groupe monogène engendré par l'élément $a$: $G = (a)$.

1. Soit $S$ un sous-groupe de $G$. On suppose qu'il existe un entier positif minimum $m$ tel que $a^m \in S$. Montrer que si $a^p \in S$, alors $m$ divise $p$.

2. Montrer que tout sous-groupe de $G$ est monogène.

   On suppose que dans la suite que $G$ est en plus fini d'ordre $n$ (cyclique).

3. Montrer que $a^p = e$si et seulement si $n$ divise $p$.

4. Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $1 \leq k \leq n$. Montrer que $(a^k) = (a^d)$, où $d = (k, n)$. En déduire que l'ordre du groupe $(a^k)$ est $\frac{n}{d}$.

5. Montrer que $G = (a^k)$ si et seulement si $(k, n) = 1$.